Title	CM型のHodge Cycleについて (代数的整数論とその周辺)
Author(s)	柳井, 裕道
Citation	数理解析研究所講究録 (1999), 1097: 89-94
Issue Date	1999-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/63019
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1097 巻 1999 年 89-94

CM 型の Hodge Cycle について

愛知工業大学　柳井裕道　(Hiromichi Yanai)

Hodge cycle は, ℓ 進表現やゼータ関数と密接な関係があり, 代数多様体の数論的な性質を調べるうえで非常に重要である. 本稿では, CM 型のアーベル多様体の場合に, 特に例外的な Hodge cycle がいつ存在するかという問題について解説する. この場合, Hodge cycle は不分岐類体 ([Y 3], [Y 4]) や Jacobi 和 ([A], [Y 2]) などの CM 体の数論的対象と直接結びついている.

1. 例外的な Hodge Cycle.

A を $\mathbb{C}$ 上の type (K, S) の d 次元 CM 型のアーベル多様体とする. (定義は [S-T], [L] 参照.) $0 < p < d$ なる p に対して,

$$H^{2p}(A, \mathbb{Q}) \cap H^{p}(A, \Omega^{p})$$

の元を余次元 p の Hodge cycle という. 次の包含関係はよく知られている.

$$\{\text{divisor の class で生成される cycles}\} \subseteq \{\text{algebraic cycles}\} \subseteq \{\text{Hodge cycles}\}$$

第2の包含関係が等号であろうというのが Hodge 予想である ([S 2]). Divisor の class で生成されない Hodge cycle を *exceptional Hodge cycle* という. Exceptional な Hodge cycle の存在は, Hodge 予想の証明／反例を考えるうえで重要なことはもちろんであるが, ideal 群や Gauss 和のような数論的対象にある種の degeneration を引き起こすので, 非常に興味深い.

アーベル多様体 A について, 任意の $k \geq 1$ に対して積 A^k 上に exceptional な Hodge cycle がないとき, A は *stably nondegenerate* であるという ([H 1]). Stably nondegenerate な A に対しては Hodge 予想が成立している. あきらかに, A が stably nondegenerate なら A 自身の上に exceptional な Hodge cycle は存在しないが, Ribet は (CM 型の場合に) この逆が成り立つかという問題を提起した. これに関しては,

- 準同型の体 K が $\mathbb{Q}$ 上のアーベル拡大の時は成立する (H. Lenstra Jr.),
- 一般の場合は反例あり (P. White),

であることがわかっている ([W]). White の反例は $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times D_5$ であるような 100 次元のアーベル多様体である.

A が素数次元なら exceptional Hodge cycle を持たないことがわかっている ([T], [R 2], [Y 1]).

以下に exceptional Hodge cycle の存在について, 知られている結果 (の一部) を列挙する. A は type (K, S) の simple な CM 型アーベル多様体とする.

- 1960 年代後半に, Mumford は 4 次元の A で exceptional Hodge cycle を持つものを構成した. (具体的な最初の例? [P] 参照.)
- K が 円分体の場合に exceptional Hodge cycle を持つ数多くの例が知られている. ([S 1], [R 1] 参照.)
- 特に, 奇素数 ℓ に対して A が代数曲線 $y^\ell = x^a(1-x) \quad (1 \leq a \leq \ell - 2)$ の Jacobian variety (Fermat 型のアーベル多様体) で simple のときは, K は円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_\ell)$ であって, A が exceptional Hodge cycle を持つことと, $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times$ の奇指標 χ で $\chi(a+1) = \chi(a) + 1$ をみたすものが存在することとが同値である. このような (ℓ, a) は $(67, 6), (127, 11), (139, 16), \ldots$ など無限組存在する. ([G] 参照.) この場合, Hodge cycle はすべて algebraic であることがわかっている (Shioda [S 1]).
- K が $\mathbb{Q}$ 上特別の形の Galois 拡大である場合に Dodson の詳しい研究がある ([D]).
- ℓ が $\ell \equiv 1 \pmod 4$ なる素数のとき, genus $\dfrac{\ell - 1}{2}$ の超楕円曲線で, その Jacobian variety A 上 exceptional Hodge cycle が存在するものがある. ここでは, $K = \mathbb{Q}(\zeta_\ell + \zeta_\ell^{-1}, \sqrt{-1})$ である ([TTV]).
- K が $\mathbb{Q}$ 上のアーベル拡大で $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/pqr\mathbb{Z}$ (p, q, r は相異なる奇素数) のとき, K を準同型の体とする A で exceptional Hodge cycle を持つものがある. (Lenstra の "pqr-example ", [R 1] 参照.)

CM 体 K を 複素数体 $\mathbb{C}$ の部分体とみなし，Γ を K の $\mathbb{C}$ への埋め込み全体とする．$\mathrm{H}_1(A,\mathbb{Q}) \cong K$ であるから

$$\mathrm{H}^1(A,\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{H}_1(A,\mathbb{Q}),\mathbb{C}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K,\mathbb{C}) = \bigoplus_{\sigma\in\Gamma} \mathbb{C}\sigma$$

であって，Hodge 分解は

$$\mathrm{H}^n(A,\mathbb{C}) = \bigoplus_{\substack{p+q=n\\ p\geq 0, q\geq 0}} (\bigwedge^p \mathrm{H}^{1,0} \otimes \bigwedge^q \mathrm{H}^{0,1}), \quad \mathrm{H}^{1,0} \cong \bigoplus_{\sigma\in S} \mathbb{C}\sigma, \quad \mathrm{H}^{0,1} \cong \bigoplus_{\tau\in S\rho} \mathbb{C}\tau$$

と表せる．(ρ は complex conjugation.) これにより，$(\mathrm{H}^{2p}(A,\mathbb{Q}) \cap \mathrm{H}^{p,p}) \otimes \mathbb{C}$ の元 (complex valued Hodge cycle) を Γ の元で記述でき ([P])，さらに Hodge cycle の， ideal や Gauss 和への作用を考えることもできる ([Y 2], [Y 3])．

2. ひとつの構成法.

前節の例を眺めていると，CM 体 K が多くの部分 CM 体を含むとき exceptional な Hodge cycle が生じやすいということが見て取れる．実際，次の定理が成り立つ ([Y 4])．

定理. $K \supset K_1 \supset K_2$ を $\mathbb{C}$ 内の相異なる CM 体とし，Γ, Γ_1, Γ_2 をこれらの体の $\mathbb{C}$ への埋め込み全体とする．$\pi_1 : \Gamma \to \Gamma_1$, $\pi_{12} : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ で canonical surjections を表す．K の CM 型 $S \subset \Gamma$ で次の条件をみたすものを取る．

$$(*)\begin{cases} \text{各 } \mu \in \Gamma_2 \text{ に対して非負整数 } a_\mu \text{ が存在して,} \\ \pi_{12}(\tau) = \mu \text{ となるすべての } \tau \in \Gamma_1 \text{ について } \#\{\sigma \in S \mid \pi_1(\sigma) = \tau\} = a_\mu. \end{cases}$$

このとき，type (K,S) の CM 型アーベル多様体 A が simple なら，A 上に exceptional な Hodge cycle が存在する．

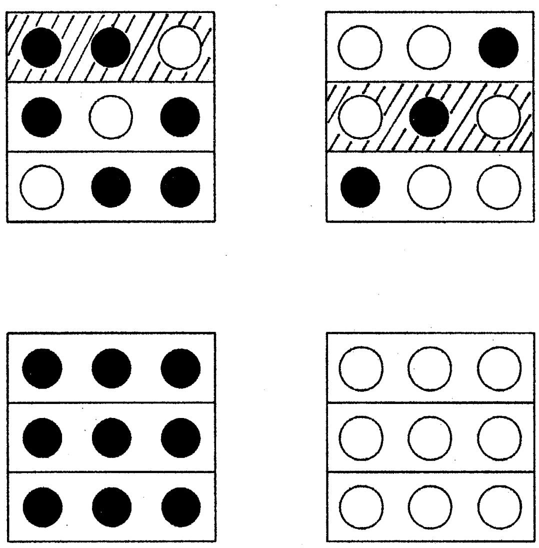
注意. (1) $K \supset K_1 \supset K_2$ が与えられたとき $(*)$ をみたす S の取り方はたくさんあって，ほとんどの場合 A は simple になる．
(2) このような A に対して，Hodge 群の次元の上からの評価もできる．
(3) ある $\mu \in \Gamma_2$ について $\tau, \tau' \in \Gamma_1$ が $\tau \neq \tau'$, $\pi_{12}(\tau) = \pi_{12}(\tau') = \mu$ をみたすとき，

$$\Big(\bigwedge_{\substack{\sigma\in\Gamma\\ \pi_1(\sigma)=\tau}} \sigma\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{\substack{\sigma'\in\Gamma\\ \pi_1(\sigma')=\tau'\rho}} \sigma'\Big)$$

は A 上の (complex valued) exceptional Hodge cycle である.

前節の最後に述べたように，cohomology 群 $\mathrm{H}^n(A,\mathbb{C})$ の元は Γ の元を用いて表すことができ，その中で Aut($\mathbb{C}$) の作用で特別の振る舞いをするものが Hodge cycle となる．上の定理においては，Γ を Γ_1,Γ_2 の元 (coset) に分けることによって，Aut($\mathbb{C}$) の作用を統制しているのである（分割統治！).

例.　K として 37 分体 $\mathbb{Q}(\zeta_{37})$ をとり，K_1,K_2 をそれぞれ $\mathbb{Q}$ 上 12 次と 4 次の部分体とする．CM 型 $S\subset\Gamma=\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})\cong(\mathbb{Z}/37\mathbb{Z})^\times$ を定理の条件 (∗) をみたすようにとる．例えば $S=\{1,2,3,7,12,14,15,16,18,20,24,26,27,28,29,31,32,33\}$．このとき，type (K,S) の 18 次元アーベル多様体 A 上には余次元 3 の exceptional Hodge cycle が存在する.（例えば 1,10,21,25,26,28 に対応する Γ の元の外積を取ったもの.）この cycle が algebraic である（または，algebraic でない !?）ことを示すことは，非常に面白い問題である.



分割統治の図：36 個の丸は Γ の元，12 個の長方形は Γ_1 の元 (coset)，4 個の正方形は Γ_2 の元 (coset) を表す．複素共役 ρ は左右の平行移動を引き起こす．S として例えば黒丸の元が取れる．斜線部分はひとつの exceptional な Hodge cycle 表す.

同様の方法で，2 つの CM 型アーベル多様体 A,B で，A,B 各々の上には exceptional Hodge cycle が存在しないが，積 $A\times B$ 上には存在するようなものを作る

ことが出来る．A, B が IV 型でない（従って CM 型でない）アーベル多様体のときは，各々が stably nondegenerate なら $A \times B$ もそうであることが知られている（[H 2]）．

参考文献

[A] N. Aoki: Abelian Fields Generated by a Jacobi Sum, Comm. Math. Univ. Sancti Pauli, Vol.45 No.1 (1996) 1–21.

[D] B. Dodson: The structure of Galois groups of CM-fields, Trans. Amer. Math. Soc. vol.283 no.1 (1984) 1–32.

[G] R. Greenberg, On the Jacobian variety of some algebraic curves, Comp. Math. vol.42, Fasc. 3 (1981) 345–359.

[H 1] F. Hazama: Algebraic cycles on certain abelian varieties and powers of special surfaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo IA vol.31 (1985) 487–520.

[H 2] —: Algebraic cycles on nonsimple abelian varieties, Duke Math. J. vol.58 no.1 (1989) 31–37.

[L] S. Lang: "Complex Multiplication ", Springer (1983).

[P] H. Pohlmann: Algebraic cycles on abelian varieties of complex multiplication type, Ann. of Math.(2) vol.88 (1968) 161–180.

[R 1] K. A. Ribet: Division fields of abelian varieties with complex multiplication, Mém. Soc. Math. France, No.2 (1980) 75–94.

[R 2] —: Hodge classes on certain types of abelian varieties, Amer. J. Math. vol.105 (1983) 523–538.

[S-T] G. Shimura and Y. Taniyama: "Complex Multiplication of Abelian Varieties and Its Application to Number Theory", Publ. Math. Soc. Japan (1961).

[S 1] T. Shioda: Algebraic Cycles on Abelian Varieties of Fermat type, Math. Ann. vol.258 (1981) 65–80.

[S 2] —: What is known about the Hodge Conjecture?, Advanced Studies in Pure Math. vol.1 (1983) 55–68.

[T] S. G. Tankeev: Cycles on simple abelian varieties of prime dimension, Math. USSR Izv. vol.20, no.1 (1983) 157–171.

[TTV] W. Tautz, J. Top and A. Verberkmoes: Explicit hyperelliptic curves with real multiplication and permutation polynomials, Can. J. Math. Vol.43(5) (1991) 1055–1064.

[W] S. P. White: Sporadic cycles on CM abelian varieties, Compositio Math. vol.88 (1993) 123–142.

[Y 1] H. Yanai: On the rank of CM-types, Nagoya Math. J. vol.97 (1985) 169–172.

[Y 2] —: 「CM 型の Hodge Element」整数論シンポジウム報告書（香川大学）(1993) 96–103.

[Y 3] —: On Degenerate CM-types, J. of Number Theory, vol.49, No.3 (1994) 295–303.

[Y 4] —: Hodge Cycles and Unramified Class Fields, to appear.